

Πάτρα, . . ./. . ./ . . .

Αρ. Πρωτ.: . . . . . .

## Προς: Επιτροπή Ερευνών του Ειδικού Λογαριασμού του Τ.Ε.Ι. Πάτρας

**Παραδοτέα Έργου**

|  |  |
| --- | --- |
| Επιστημονικός υπεύθυνος: | **ΚΑΜΒΥΣΑΣ ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ** |
| Τίτλος έργου: | **ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΙΙΙ: ΕΝΙΣΧΥΣΗ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΣΤΑ ΤΕΙ - ΥΠΟΕΡΓΟ 8 «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΡΟΪΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΒΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΥΓΡΩΝ ΓΙΑ ΘΕΡΑΠΕΥΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΣΕ ΚΛΙΝΙΚΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ»** |
| Κωδικός έργου: | 10.74.11.02 - 061 |

*Παραδοτέο Π.Ε.5. Θεμελίωση Υπολογιστικών Μεθόδων & Μαθηματικά Μοντέλα Επίλυσης*

Στα πλαίσια του Π.Ε.5 Θεμελίωση Υπολογιστικών Μεθόδων & Μαθηματικά Μοντέλα Επίλυσης:

Σύνοψη: Έγινε η εύρεση αναλυτικών λύσεων, η ανάλυση πινάκων των Απλεγματικών μεθόδων, και τα κριτήρια Θετικότητας και Αντιστρεπτότητας Πινάκων προς επίλυση.

Περιγραφή Εργασιών: Έγιναν εργασίες συγκρίσεων των μεθόδων όπου διαφαίνεται ότι η μέθοδος Lattice-Boltzmann είναι προτιμητέα στα προβλήματα ροής καθώς συγκλίνει ταχύτερα. Η απλεγματική μέθοδος MLPG διαφαίνεται η πιο κατάλληλη για τo πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας. Η συμβατική μέθοδος FEM φαίνεται κατάλληλη, ήτοι δίνει πιο ταχεία λύση, κυρίως για απλοϊκές γεωμετρίες και συνθήκες.

Το φυσικό πρόβλημα μοντελοποιήθηκε λαμβάνοντας υπόψη σημαντικές αιμοδυναμικές παραμέτρους σχετικά με τη τοπική μεταφορά μάζας και την ανάπτυξη διατμητικών τάσεων στην επαφή βιολογικού υγρού και τοιχώματος αγγείου, οι οποίες αναλύθηκαν τόσο με απλεγματικές όσο και με τυπικές CFD μεθόδους FEM. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων ανέδειξε την ακρίβεια χρήσης αυτών των ταχύτερων -σε σχέση με τις συμβατικές- καινοτόμων υπολογιστικών μεθόδων, όπως και την αποτελεσματικότερη χρήση τους για την υπολογιστική διερεύνηση σε εύρος συνθηκών που σχετίζονται τόσο με την παθογένεση όσο και την εξέλιξη της αθηρωμάτωσης/στένωσης.

# ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ προβλήματος

Η ασυμπίεστη ιξώδη στρωτή ροή και η μεταφορά θερμότητας σε βιολογικά συστήματα ενός βιορευστού περιγράφονται από ένα σύνολο μερικών διαφορικών εξισώσεων για την διατήρηση της μάζας (εξίσωση συνέχειας), της ορμής (εξίσωση Navier-Stokes) και της ενέργειας. Συγκεκριμένα: 







όπου  η ταχύτητα του ρευστού στους πόρους του πορώδους μέσου. ,,,,εκφράζουν αντίστοιχα την πυκνότητα, το δυναμικό ιξώδες, την θερμοχωρητικότητα, την θερμική αγωγιμότητα και την θερμοκρασία τοπικά στο πορώδες μέσο.είναι η οδηγούσα εξωτερική δύναμη της ροής, η οποία εφαρμόζεται στην *x*-διεύθυνση.

Δύο διαφορετικές πορώδεις δομές χρησιμοποιούνται στη παρούσα μελέτη (Σχ. 1), όπου επιλύονται οι παραπάνω εξισώσεις. Η μία είναι σχετικά απλή, με πορώδες 0.57, Σχ. 1(α), και χρησιμοποιείται για την δοκιμή της υβριδικής μεθόδου, και η δεύτερη Σχ. 1(β), πιο ρεαλιστική, με πορώδες 0.68, όπου αναφαίνεται καλύτερα η επιτυχία της μεθόδου.

Σταθερές θερμοκρασίες (**και**) επιβάλλονται στα δύο απέναντι τοιχώματα του χωρίου (αριστερό και δεξί όριο του Σχ. 1(α-β)), ενώ τα άλλα δύο θεωρούνται θερμικά μονωμένα. Η ροή θεωρείται περιοδική κατά την *x*-διεύθυνση, και στα άνω και κάτω όρια του πεδίου υποθέτονται τοιχώματα μηδενικής ταχύτητας.

(α)   
(β)

1

1

*είσοδος*

*έξοδος*

0.5

5

5

Σχήμα 1. Χαρακτηριστικές δομές με στένωση. (α) Αναπαράσταση γεωμετρίας αγγείου με στένωση ορισμένη ως *x*2+4*y*2=1. (β) δομή με πεπλεγμένη στένωση

### ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Η αδιάστατη μορφή των εξισώσεων ροής στη ανάλυση ταχύτητας-στροβιλότητας μπορεί να γραφτεί ως εξής:

 (10α)

, (10β)

όπου ***u***=(*u*,*v,w*) είναι οι όροι ταχύτητας, ***ω***=(*ξ*,*η*,*ζ*) είναι οι όροι στροβιλότητας, *Re* ο αριθμός Reynolds, και *Ω* είναι το χωρίουπολογισμών με σύνορο *Ω*. Αναζητάμε τη λύση των Εξ. (10α-β) στο χωρίο *Ω* που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (σε χρόνο *t*=0)



 (11)

και τις συνοριακές συνθήκες



 σε *t*0. (12)

 (13)

Περισσότερες πληροφορίες για την μέθοδο γραμμικοποίησης των όρων ταχύτητας-στροβιλότητας μπορεί να βρεθούν αλλού [[1](#_ENREF_1), [2](#_ENREF_2)]. Σε μια σύντομη περιγραφή του αλγορίθμου, η διαδικασία ακολουθεί τα εξής βήματα.

* Οι αρχικές τιμές ταχύτητας *u*(0), *v*(0), και *w*(0) χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των αρχικών συστατικών πεδίο στροβιλισμού (*ξ*(0),*η*(0,*ζ*(0)) χρησιμοποιώντας τον τύπο ***ω***(0)=×***u***(0),
* Οι κλίσεις στο δεξιό μέρος της Εξ. (10α)-(10β) υπολογίζονται και οι εξισώσεις επιλύνονται για τους όρους ταχύτητας. Νε τον τρόπο αυτό, το πεδίο ταχύτητας ***u***(\*)=(*u*(\*),*v*(\*),*w*(\*))υπολογίζεται εκ νέου.
* Εφαρμόζεται η μέθοδος διόρθωσης της ταχύτητας
* Ελέγχεται η σύγκλιση του σφάλματος και η διαδικασία επίλυσης συνεχίζεται.

### **Εφαρμογή των μεθόδων MLPG και FEM για προσομοίωση ροής και συναγωγής θερμότητας σε βιολογικά συστήματα**

Οι μεταβλητές του προβλήματος αδιαστατοποιούνται ως εξής:



Εφαρμόζοντας τις παραπάνω εκφράσεις στις διαστατές εξισώσεις του προβλήματος, και παίρνοντας τον στροβιλισμό των εξισώσεων, έχουμε τις αδιάστατες εξισώσεις στην μορφή ταχύτητας-στροβιλότητας. Συγκεκριμένα:









Όπου , ,,. Με τις εξισώσεις σε αυτήν την μορφή, μηδενίζεται ο όρος της εξωτερικής δύναμης. Το πρόβλημα αυτό παρακάμπτεται με την επιβολή μιας παροχής σαν συνοριακή συνθήκη εισόδου, η οποία θα οδηγεί σε ίδιο αριθμό Reynolds (), με αυτόν που προκύπτει από την επιβολή της δύναμης. Με βάση αυτό γίνονται οι συγκρίσεις.

Παίρνοντας την σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή των παραπάνω εξισώσεων στο χωρίο Ωx και επιλέγοντας όπως παραπάνω τη συνάρτηση βάρους της ολοκλήρωσης *w*=1 όπου *x*∈Ω*x*, και 0 αλλού και εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης του Gauss, οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της ροής και επιλύονται μόνο στους πόρους του μέσου παίρνουν την μορφή:







Μια επαναληπτική μέθοδος χρησιμοποιείται για την λύση των παραπάνω εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή έχει ήδη πολλές επιτυχίες σε προβλήματα ροής. Ο λόγος που οι εξισώσεις επιλύονται στην μορφή ταχύτητας-στροβιλότητας, είναι η αποφυγή του εναλλασσόμενου πλέγματος, που χρησιμοποιείται για την λύση των εξισώσεων στην μορφή ταχύτητας-πίεσης. Η στροβιλότητα στα σύνορα, υπολογίζεται από τον ορισμό της . Η διαδικασία ξεκινά με μια αρχική εκτίμηση του πεδίου ταχυτήτων , η οποία πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας , και υπολογίζεται η στροβιλότητα από τον ορισμό της. Εν συνεχεία, επιλύονται οι αντίστοιχες εξισώσεις, θεωρώντας γνωστή τη στροβιλότητα, για τον υπολογισμό των ταχυτήτων . Αυτό το πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει, εν γένει δεν ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας . Προς τούτο, θα πρέπει η ταχύτητα  να διορθώνεται κατά έναν παράγοντα , έτσι ώστε  . Υποθέτοντας το πεδίο διόρθωσης ταχυτήτων αστρόβιλο , ορίζεται ένα δυναμικό διόρθωσης (δυναμικό Helmholtz) , ως . Συνδυάζοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στην εξίσωση για αυτό το δυναμικό:



Η σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης αυτής στο χωρίο Ωx γύρο από τον κόμβο *x* δίδεται από τη σχέση:



όταν η εξίσωση για το δυναμικό έχει λυθεί, και το πεδίο ταχυτήτων είναι ενημερωμένο, ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας. Από τις νέες αυτές τιμές της ταχύτητας , υπολογίζεται η στροβιλότητα από την εξίσωση (29). Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται, έως ότου η μέγιστη διαφορά των ταχυτήτων είναι μεγαλύτερη από κάποια συγκεκριμένη τιμή (10-5).

Μετά την λύση του ροϊκού προβλήματος, οι ταχύτητες χρησιμοποιούνται για την εύρεση του ροϊκο-θερμοκρασιακού προφίλ.

Η μελέτη της μεταφοράς θερμότητας παρέχει λύσεις για πολλά σημαντικά προβλήματα, που αφορούν την μηχανική ως επιστήμη αλλά και τεχνολογικές εφαρμογές. Πολλά από αυτά τα προβλήματα περιλαμβάνουν μεταφορά ενέργειας μεταξύ υλικών λόγω διαφοράς θερμοκρασίας [1]. Ειδικότερα, η μοντελοποίηση της κατανομής της θερμοκρασίας και της μεταφοράς θερμότητας μέσα σε βιολογικούς ιστούς έχει άμεσο ενδιαφέρον για διάφορες ιατρικές και θεραπευτικές εφαρμογές [2]. Η πλειοψηφία των πρακτικών προβλημάτων μεταφοράς θερμότητας δεν μπορεί να λυθεί με αναλυτικό τρόπο, εκτός εάν χρησιμοποιηθούν υποθέσεις που συνήθως οδηγούν σε υπεραπλουστεύσεις. Εκεί ακριβώς γίνεται απαραίτητη η δημιουργία υπολογιστικών μοντέλων, τα οποία δίνουν γρήγορες και ακριβείς λύσεις. Πολλές συμβατικές αριθμητικές τεχνικές, όπως αυτή των πεπερασμένων διαφορών (FD), των πεπερασμένων όγκων (FVM) και των πεπερασμένων στοιχείων (FEM), έχουν εφαρμοστεί συστηματικά. Παρά την αξιοσημείωτη επιτυχία τους, οι συνήθεις αυτές αριθμητικές μέθοδοι έχουν ακόμη κάποιες εγγενείς αδυναμίες που μειώνουν την αποτελεσματικότητα τους και περιορίζουν τις εφαρμογές τους σε πρακτικά προβλήματα, ιδίως στις τρεις διαστάσεις. Οι βασικές πηγές των προβλημάτων σχετίζονται με τη χρήση χαμηλών πολυωνυμικών προσεγγίσεων, καθώς και την απαίτηση να δημιουργηθεί ένα καλά οργανωμένο και συνδεόμενο πλέγμα στον κυρίως τομέα του προβλήματος και τα σύνορά του. Η δημιουργία του πλέγματος αυτού μπορεί να είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Λόγω αυτής της δυσκολίας των συμβατικών αριθμητικών τεχνικών, νέες αριθμητικές μέθοδοι, που κοινώς αποκαλούνται απλεγματικές, έχουν εμφανιστεί πρόσφατα [3,4]. Οι μέθοδοι αυτές υπερνικούν πολλά από τα προβλήματα που σχετίζονται με την δημιουργία του πλέγματος, με την εξάλειψή του κατά την διαδικασία εύρεσης της λύσης. Η μέθοδος Δικτύου-Boltzmann (LΒ) αποτελεί μια εναλλακτική και αρκετά υποσχόμενη αριθμητική μέθοδο προσομοίωσης της ροής ρευστών. Η ευελιξία της μεθόδου LB στην αντιμετώπιση περίπλοκων και συχνά χρονομεταβαλλόμενων συνοριακών συνθηκών, το καθιστούν ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο στην προσομοίωση αγωγής και συναγωγής θερμότητας σε πορώδη μέσα [5].

# μεθοδος MLPG

Η απλεγματική μέθοδος Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) βασίζεται στην έκφραση των μερικών διαφορικών εξισώσεων στην τοπική ασθενή μορφή, δηλαδή στην ολοκλήρωσή τους μέσα σε τοπικούς τομείς. Η προσέγγιση των μεταβλητών πραγματοποιείται με συναρτήσεις βάσης, οι οποίες προκύπτουν από τη μέθοδο παρεμβολής Κυλιόμενων Ελαχίστων Τετραγώνων (MLS). Όλα τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν άμεσα πάνω σε συνηθισμένα σχήματα ή στα όριά τους [6-8].

Στην μέθοδο παρεμβολής Κυλιόμενων Ελαχίστων Τετραγώνων (MLS) [4], η προσέγγιση της λύσης, *Th*(***x***), είναι το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος πολυωνυμικής βάσης, ***p***(***x***), και ενός διανύσματος συντελεστών, ***a***(***x***),

,

όπου , και *q* ο αριθμός των μονωνύμων που συγκροτούν την πολυωνυμική βάση (3 ή 6). Ο καθορισμός των συντελεστών ***a***(***x***) οδηγεί στο γραμμικό σύστημα, όπου  είναι το διάνυσμα της τιμής της συνάρτησης πάνω στους κόμβους, και  είναι συναρτησιακοί πίνακες. Αντικαθιστώντας το σύστημα στην γενική μορφή της προσέγγισης, Εξ.(4), έχουμε την τελική μορφή της προσέγγισης των κυλιόμενων ελαχίστων τετραγώνων,

,

όπου**είναι η συνάρτηση βάσης των Κυλιόμενων Ελάχιστων Τετραγώνων του χώρου του προβλήματος . Οι παράγωγοι της συνάρτησης βάσης μπορούν να υπολογισθούν εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας.

Κρίσιμης σημασίας για την MLPG μέθοδο είναι η επιλογή του χωρίου, στο οποίο θα τελεσθεί η τοπική ολοκλήρωση. Στις περισσότερες εφαρμογές της μεθόδου [7], ως τέτοια χωρία χρησομοποιούνται κυκλικοί τομείς, με ακτίνα ένα κλάσμα της μέσης τοπικής απόστασης των κόμβων (συνήθως 60%) γύρω από κάθε κόμβο. Με αυτή την προσέγγιση, αν και έχει επιτυχίες, είτε δεν καλύπτεται όλο το προς επίλυση χωρίο, είτε οδηγεί σε σημαντικές αλληλεπικαλύψεις των τοπικών ολοκληρωμάτων. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα σταθερότητας της μεθόδου, τα οποία συσσωρεύονται σε χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα. Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιούνται ορθογώνιες περιοχές γύρω από κάθε κόμβο για τον υπολογισμό τον ολοκληρωμάτων [6].

Για την ολοκλήρωση σε όλους τους δευτερογενείς τομείς χρησιμοποιείται η μέθοδος Gauss. Περαιτέρω λεπτομέρειες σχετικά με την διαδικασία και τις συνοριακές συνθήκες μπορούν να βρεθούν στα [8]. Οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες (Dirichlet) επιβάλλονται ρητά με πρώτης τάξης MLS παρεμβολή.

Η σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης της θερμότητας στο χωρίο Ωx γύρω από τον κόμβο *x* δίδεται από τη σχέση

,

όπου  η συνάρτηση βάρους της ολοκλήρωσης (εδώ συνάρτηση βήματος) και . Ακολουθώντας τις αδιαστατοποιήσεις [6] που προσδιορίζονται με βάση τη γεωμετρία του χωρίου, τις συνοριακές συνθήκες και τις φυσικές ιδιότητες του υλικού στους πόρους, ορίζοντας μια συνάρτηση Φ τύπου βήματος, που ορίζεται στην περιοχή του στερεού όγκου (μονάδα εκεί, μηδέν αλλού), με την βοήθεια της οποίας εκφράζονται οι αδιάστατες ιδιότητες του μέσου, και εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης, όπου αυτό είναι δυνατόν, παίρνουμε την τελική επαναληπτική μορφή, χρονικού βήματος . Κρατώντας τους όρους που αναφέρονται στο *m* χρονικό βήμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, ενώ σταθερές και μεταβλητές προηγούμενου βήματος στο άλλο, έχουμε το προς επίλυση σύστημα:

,

όπου ,,,  και . Αυτό το γραμμικοποιημένο σύστημα της μορφής **A**(***T***(m-1)) ***T***(m)= **B**(***T***(m-1)) χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της θερμοκρασιακής κατανομής στον χρόνο. Όσον αφορά την χρονική εξέλιξη χρησιμοποιήθηκε ένας προσαρμοστικός αλγόριθμος, που προσαρμόζει το χρονικό βήμα σε κάθε επανάληψη, έτσι ώστε το σφάλμα να φράσσεται σε κάποια προκαθορισμένα όρια.

Παίρνοντας τον στροβιλισμό των Εξ. (1-3) στην αδιάστατη μορφή του, έχουμε τις εξισώσεις στην μορφή ταχύτητας-στροβιλότητας, των οποίων η σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή είναι:







Ο λόγος που οι εξισώσεις επιλύονται στην μορφή ταχύτητας-στροβιλότητας, είναι η αποφυγή του εναλλασσόμενου πλέγματος (staggered), που χρησιμοποιείται για την λύση των εξισώσεων στην μορφή ταχύτητας-πίεσης. Ως συνοριακή συνθήκη εισόδου έχει τεθεί η επιβολή συγκεκριμένης παροχής .

Για την λύση των παραπάνω εξισώσεων χρησιμοποιείται επαναληπτική μέθοδος. Η μέθοδος αυτή έχει ήδη πολλές επιτυχίες σε προβλήματα ροής [4]. Η ταχύτητα  που προκύπτει από τις Εξ.(8-10) διορθώνεται κατά έναν παράγοντα , σε κάθε επανάληψη, έτσι ώστε . Προς τούτο, ορίζεται ένα δυναμικό διόρθωσης , ως . Η σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή του δυναμικού αυτού δίδεται από τη σχέση:



Σαν μέτρο σύγκρισης για όλα τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM). Τυπική ασθενής μορφή τους χρησιμοποιείται σε αυτά, σύμφωνα με την προσέγγιση κατά Galerkin, με μη δομημένο (τριγωνικό) πλέγμα στοιχείων στις δύο περιοχές του μέσου, και οριακά στρώματα στα όρια των διεπιφανειών.

**ΜΕΘΟΔΟΣ LB**

Η επίλυση της ροής επιτυγχάνεται με το πρότυπο δικτύου-Boltzmann (LB) δύο διαστάσεων και 9 ταχυτήτων (*D2Q9*). Η θεμελιώδης κυψελίδα φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα (Σχ.2) και τα διανύσματα των ταχυτήτων δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις [9]:

**0**

**1**

**2**

**3**

**4**

**5**

**6**

**7**

**8**

Σχήμα 2. Η θεμελιώδης κυψελίδα του μοντέλου







Η ροή στο πρότυπο περιγράφεται μέσω της διακριτής εξίσωσης Boltzmann μέσω της σταθεράς χαλάρωσης, *το*, στην διακριτή εξίσωση, υπό την προσέγγιση BGK [10]



όπου *f0,i* είναι η συνάρτηση κατανομής ενός σωματιδίου κατά την διεύθυνση *i* και με διακριτή ταχύτητα, *ei*, στην χωρική θέση ***x*** και την χρονική στιγμή *t*, ενώ *fieq* είναι η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας, η οποία δίνεται από το ακόλουθο ανάπτυγμα [11]:





όπου *ρ0* είναι η πυκνότητα του ρευστού. Οι μακροσκοπικές παράμετροι της ροής όπως πυκνότητα και ταχύτητα εκφράζονται με τα ακόλουθα αθροίσματα:





Τα ισοζύγια μάζας και ορμής αναπαράγονται με βάση τις Εξ. (15-18) μέσω των αναπτυγμάτων Chapman- Enskog [12], και δίνονται [9]:





Το κινηματικό ιξώδες για το πρότυπο *D2Q9* είναι:



Για την μελέτη της συναγωγής εισάγεται στο μοντέλο και συνάρτηση κατανομής, *f1,i*, για την περιγραφή της θερμοκρασίας [5]. Η μεταβολή της θερμοκρασίας περιγράφεται με την ακόλουθη διακριτή εξίσωση δικτύου-Boltzmann



όπου *f1,i* είναι η συνάρτηση κατανομής ενός σωματιδίου κατά την διεύθυνση *i* και με διακριτή ταχύτητα, *ei*, στην χωρική θέση ***x*** και την χρονική στιγμή *t*, και *τ1* είναι η σταθερά χαλάρωσης του θερμικού προβλήματος διάχυσης και σχετίζεται με την θερμική αγωγιμότητα (*κ*) για το πρότυπο των 9 ταχυτήτων (*D2Q9*) σύμφωνα με την σχέση [5,13,14]:



όπου *α* θερμική διαχυτότητα στο θερμικό πρόβλημα, και  η ταχύτητα του ήχου.

Η θερμοκρασία στο πρότυπο δίνεται από το ακόλουθο άθροισμα:



Όπου η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας () εξαρτάται από το ανάπτυγμα της () (Εξ. 16) [5,15].



**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ**

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν προβλήματα αγωγής και συναγωγής θερμότητας. Στα προβλήματα αγωγής μελετήθηκαν καταστάσεις μόνιμες και χρονομεταβαλλόμενες, όπως επίσης και περιπτώσεις όπου η θερμική αγωγιμότητα των μέσων μεταβάλλεται με την θερμοκρασία. Οι αριθμητικές λύσεις των προβλημάτων αυτών επιτυγχάνονται με τη χρήση της μεθόδου MLPG, καθώς έχει δειχθεί ότι είναι πιο αποτελεσματική [3,4]. Η προσέγγιση των μεταβλητών πραγματοποιείται με συναρτήσεις βάσης, οι οποίες προκύπτουν από τη μέθοδο παρεμβολής Κυλιόμενων Ελαχίστων Τετραγώνων (MLS). Η ακρίβεια και η αποτελεσματικότητα της μεθόδου διερευνάται με μεταβολή: i) της διακριτοποίησης του χώρου, ii) της τάξης της συνάρτησης βάσης, iii) του σχήματος του χώρου ολοκλήρωσης γύρω από κάθε κόμβο, iv) του εύρους του λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων των μέσων, και v) του εύρους του λόγου των θερμοχωρητικοτήτων των μέσων. Η μέθοδος Lattice-Boltzmann τετραγωνικού πλέγματος 9 ταχυτήτων (D2Q9) προτύπου BGK μονής χαλάρωσης εφαρμόστηκε για τον υπολογισμό του πεδίου ροής. Αποδεικνύεται ότι αυτή η μέθοδος Lattice-Boltzmann είναι προτιμητέα σε αυτά τα προβλήματα καθώς συγκλίνει ταχύτερα. Η ροή θεωρείται ασυμπίεστη και έγινε γίνεται διερεύνηση των αποτελεσμάτων σε ένα εύρος αριθμών Reynolds.

Απομονώνοντας το θερμικό πρόβλημα προς το παρόν, ακολουθεί μια ανάλυση πάνω στην μέθοδο MLPG, στην δεύτερη δομή Σχ. 1(β), η οποία αφορά προβλήματα αγωγής. Στο Σχ. 3 καταγράφονται τα σφάλματα της μεθόδου σε ένα μεγάλο εύρος λόγου των ιδιοτήτων των μέσων, σε μόνιμη κατάσταση, Σχ.3(α), αλλά και σε χρονικά μεταβαλλόμενες καταστάσεις, Σχ. 3(β). Στο Σχ. 3(α) φαίνεται το επί τοις εκατό σφάλμα, όπως αυτό αποτυπώνεται στην αποτελεσματική θερμική αγωγιμότητα (*k*eff error ≡ |*k*eff - *k*eff(FEM)| / *k*eff(FEM)), με τις αγωγιμότητες των δύο μέσων να μην εξαρτώνται από την θερμοκρασία (*b*r=0). Παρουσιάζονται τα σφάλματα για τις προσεγγίσεις 1ης και 2ης τάξης, καθώς και για το σχήμα των τομέων ολοκλήρωσης, τετραγωνικό ή κυκλικό. Στο Σχ. 3(β) παρουσιάζεται το σφάλμα για ακραίες τιμές των λόγων των ιδιοτήτων των μέσων (br, kr , c*p*r), στα πρώιμα στάδια της χρονικής εξέλιξης της διαδικασίας. Ως αρχική συνθήκη έχει θεωρηθεί η θερμοκρασία του δεξιού τοιχώματος (). Το σφάλμα αυτό είναι η L2 νόρμα των διαφορών των λύσεων της μεθόδου από αυτήν των FEM, με τοπική πύκνωση (41769 στοιχεία) και σύγκλιση της τάξης 10-6. Για την MLPG μέθοδο χρησιμοποιούνται τρία επίπεδα διακριτοποίησης: Ένα με 200 κόμβους ανά διάσταση (40401 κόμβοι), ένα με 100 (10101 κόμβοι), και ένα άλλο που αποτελεί πύκνωση σε μια περιοχή κοντά στις διεπιφάνειες του τελευταίου (23727 κόμβοι). Πολλά χρήσιμα συμπεράσματα εξάγονται από αυτά τα διαγράμματα. Αρχικά είναι έκδηλο ότι η ολοκλήρωση σε τετραγωνικούς τομείς δίδει αποτελέσματα μιας τάξη μεγέθους καλύτερα από αυτήν σε κυκλικούς, και καθιστά τη μέθοδο πιο σταθερή για υψηλές τιμές του λόγου των αγωγιμοτήτων. Επίσης η τοπική πύκνωση βελτιώνει κατά πολύ την λύση που σχεδόν ταυτίζεται με αυτήν της διπλάσιας διακριτοποίησης. Τέλος, η 2ης τάξης προσέγγιση δεν προτιμάται αν και δίδει ελαφρώς καλύτερες λύσεις, καθώς αυξάνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.

 (α)  (β)

Σχήμα 3. (α) Σφάλμα στην τιμή του *k*eff, υπολογιζόμενο με μεθόδους MLPG και συγκρινόμενο με αυτήν των FEM. Η προσέγγιση είναι 1ης και 2ης τάξης, ολοκληρώνοντας σε τετραγωνικούς και κυκλικούς τομείς, σε δύο επίπεδα διακριτοποίησης και πύκνωση.(β) Επίδραση της πύκνωσης του πλέγματος στην L2 νόρμα, για μεγάλες τιμές του λόγου των ιδιοτήτων του μέσου, σε αρχικά στάδια χρονομεταβαλλόμενης αγωγής θερμότητας

Στο Σχ. 4 φαίνονται οι λύσεις των τριών μεθόδων για ένα πρόβλημα συναγωγής, στην περίπτωση όπου ο αριθμός Reynolds προκύπτει ίσος με 17 (*Re* = 17), και ο λόγος των θερμικών αγωγιμοτήτων των δύο μέσων είναι 10 (*kr* = 10). Ο αριθμός Prandtl, που αναφέρεται στους πόρους του μέσου, τίθεται 0.83 (*Pr* = 0.83). Πιο συγκεκριμένα, στο Σχ. 4(α) φαίνονται οι ρευματικές γραμμές του πεδίου ταχυτήτων, που προκύπτει από την εκάστοτε μέθοδο. Στο Σχ. 4(β) φαίνεται η κατανομή των αδιάστατων θερμοκρασιών. Στον Π.1 καταγράφονται οι χρόνοι που απαιτούνται για κάθε μέθοδο, ώστε η λύση να συγκλίνει. Ως κριτήριο σύγκλισης έχει τεθεί η μέγιστη διαφορά των ταχυτήτων και των θερμοκρασιών, μεταξύ δύο επαναλήψεων, να μην αλλάζει περισσότερο από 10-6. Οι μέθοδοι LB και MLPG χρησιμοποιούν ένα πλέγμα 200 κόμβων σε κάθε διάσταση (σύνολο 40401), και η μέθοδος (FEM), ένα πλέγμα ανάλογης διακριτοποίησης, με σύνολο 40496 στοιχεία.

Στην MLPG, ο υπολογιστικός χρόνος χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο αφορά τον υπολογισμό των συναρτήσεων βάσης σε όλα τα σημεία που βοηθούν στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, και απαιτείται να υπολογισθούν μία φορά για δεδομένη δομή, στην συνέχεια αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς παραμέτρων του προβλήματος. Όπως φαίνεται από τις Εξ.(8-11), για την λύση του ροϊκού προβλήματος απαιτούνται οι υπολογισμοί επιφανειακών ολοκληρωμάτων, που είναι και πιο χρονοβόρο. Αντίθετα, όπως φαίνεται από την Εξ.(7) με δεδομένες ταχύτητες και για μόνιμη κατάσταση, το πρόβλημα της συναγωγής απαιτεί μόνον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων. Το δεύτερο μέρος αφορά τον χρόνο που απαιτείται για τον υπολογισμό των ταχυτήτων και της κατανομής των θερμοκρασιών. Στα FEM, αντίστοιχα, το πρώτο μέρος αφορά την κατασκευή του πλέγματος και των οριακών στρωμάτων, και το δεύτερο στην σύγκλιση της λύσης. Στα LB ο χρόνος είναι ένας, και αφορά τη σύγκλιση της λύσης, για το ροϊκό και το θερμικό πρόβλημα. Από τoυς Πίνακες Π.1-Π.2 είναι φανερό ότι η μέθοδος LB υστερεί στον χρόνο υπολογισμού της θερμοκρασιακής κατανομής, ενώ η MLPG στον χρόνο σύγκλισης των ταχυτήτων. Συνδυασμός των δύο αυτών μεθόδων μπορεί να παρέχει μια ταχύτατη και μεγάλης ακρίβειας περιγραφή για προβλήματα συναγωγής, όπως φαίνεται στον Π.1 και στο Σχ.5(α). Εκεί παρουσιάζονται τα σφάλματα που προκύπτουν από την υβριδική μέθοδο για την λύση του προβλήματος της συναγωγής. Το πρόβλημα ροής λύνεται με χρήση της μεθόδου LB με διακριτοποίηση 200 κόμβων ανά διάσταση. Εν συνεχεία οι ταχύτητες αυτές προβάλλονται σε ένα πλέγμα με βάση 100 κόμβους ανά διάσταση και διπλάσια διακριτοποίηση στις περιοχές κοντά στις διεπιφάνειες, και λύνεται η εξίσωση για την θερμοκρασία με την MLPG προσέγγιση. Στο Σχ.5(α) φαίνεται η L2 νόρμα, των διαφορών στην θερμοκρασία, της υβριδικής μεθόδου και της λύσης των FEM. Είναι ξεκάθαρο ότι τα σφάλματα της υβριδικής αυτής μεθόδου είναι πολύ μικρά για ένα ευρύ φάσμα του αριθμού Relnolds, και για ακραίες τιμές λόγου αγωγιμοτήτων.

 (α)  (β)

Σχήμα 4. Λύσεις των LB,MLPG και FEM για ένα πρόβλημα συναγωγής θερμότητας.(α) ρευματικές γραμμές κάθε μεθόδου, για αριθμό Reynolds=17 και Prandlt=0.83 και (β) κατανομή θερμοκρασίας για λόγο αγωγιμότητας του στέρεου όγκου προς αυτή των πόρων ίσο με 10 (kr=10).

Πίνακας 1. Απαιτούμενοι χρόνοι για την λύση του προβλήματος της συναγωγής της θερμότητας για κάθε μέθοδο. Για την MLPG μέθοδο ο χρόνος προετοιμασίας είναι ο χρόνος υπολογισμού των επικαμύλιων+επιφανειακών ολοκληρωμάτων (στην περίπτωση λύσης του ροϊκού προβλήματος). Για τα FEM ο χρόνος προετοιμασίας αναφέρεται στη δημιουργία του πλέγματος.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Μέθοδοι** | **Χρόνος προετοιμασίας (s)** | **Χρόνος λύσης**  **(Πρόβλημα ροής + πρόβλημα αγωγής) (s)** |
| LB, 200 κ. ανά διάσταση. (40401 κόμβοι) | -- | 19+ 400 |
| MLPG 1ης τάξης 200κ. ανά διάσταση (40401) | 48+93 | 2447+0.7 |
| FEM, ~200κ. ανά διάσταση.  (41479 στοιχεία) | 29 | 68 |
| Υβριδική μέθοδος  (LB, 200 κ.+MLPG 100κ.+πύκνωση) | 28 | 20 |

Η ανωτερότητα της μεθόδου επισφραγίζεται συγκρίνοντας τον υπολογιστικό χρόνο των δύο μεθόδων (Π.1). Εκεί φαίνεται ότι ο χρόνος προετοιμασίας των μεθόδων που απαιτείται για κάθε δομή είναι ίδιος, αλλά η λύση με την υβριδική μέθοδο βρίσκεται σε υποτριπλάσιο χρόνο, από αυτόν των FEM. Τέλος στο Σχ. 5(β) φαίνεται η εφαρμογή της προτεινόμενης μεθόδου, σε μια πιο πολύπλοκη δομή. Παρουσιάζεται η κατανομή της θερμοκρασίας στο χωρίο, στην περίπτωση όπου ο αριθμός Reynolds προκύπτει ίσος με 30, ο αριθμός Prandlt τίθεται ίσος με 0.83 και ο λόγος των αγωγιμοτήτων του μέσου 100.

 (α)(β)

Σχήμα 5. (α) Η L2 νόρμα των λύσεων στη θερμοκρασία, της υβριδικής μεθόδου, σε σύγκριση με αυτή των FEM, για τρείς τάξης μεγέθους του αριθμού Reynolds και μεγάλους λόγους των αγωγιμοτήτων kr.

(β) Η κατανομή της θερμοκρασίας, όπως αυτή προκύπτει από την υβριδική μέθοδο, και την μέθοδο των FEM, για αριθμό Reynolds=30 και λόγο αγωγιμοτήτων kr=100.

Πίνακας 2Α.Μέσοι χρόνοι για στάδια κατασκευής, δλδ υπολογισμού συναρτήσεων σχήματος και ολοκληρωμάτων τους, για μόνιμη και για χρονομεταβαλλόμενη μέθοδος MLPG, και για την δημιουργία πλέγματος για τις μεθόδους FEM που χρησιμοποιήθηκαν στο παρόν έργο.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Μέθοδος** | **Χρόνος προετοιμασίας**  **συνθήκες μόνιμης κατάστασης**  **(s)** | **Χρόνος προετοιμασίας χρονομεταβαλλόμενες συνθήκες**  **(s)** |
| MLPG 1st τάξης, 100 px ανά διάσταση. (10101 κόμβοι) | 13 | 13+32 |
| MLPG refined locally at double resolution, 1st τάξης, initially 100 px per dim. (23727 κόμβοι) | 28 | 28+59 |
| MLPG 1st τάξης, 200 px ανά διάσταση. (40401 κόμβοι) | 48 | 48+93 |
| MLPG 2nd order, 200 px per dim. (40401 nodes), 40401 nodes | 130 | 130+305 |
| FEM, ~200px per dim.  (41769 elements) | 33 | 33+0 |

Πίνακας **2β.** Μέσοι χρόνοι για στάδιο επίλυσης, για μόνιμη κατάσταση (άνω μέρος) και αρχικά στάδια χρονομεταβαλλόμενων (κάτω μέρη) μεθόδων MLPG και FEM που χρησιμοποιήθηκαν στο παρόν έργο, για σταθερή (μεσαία στήλη) και θερμομεταβαλλόμενη αγωγιμότητα μέσου (δεξιά στήλη).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Μέθοδος** | **Στάδιο επίλυσης Μόνιμη Κατάσταση**  **σταθερή αγωγιμότητα (s)** | **Στάδιο επίλυσης Μόνιμη Κατάσταση**  **Θερμομεταβαλλόμενη αγωγιμότητα**  **(s)** |
| MLPG 1st τάξης, 100 px ανά διεύθυνση. (10101 κόμβοι) | 0.12 | 0.59 |
| MLPG τοπικά εκλεπτυσμένη σε διπλάσια διακριτοποίηση, 1st τάξης, αρχικά 100 px ανά διεύθυνση. (23727 κόμβοι) | 0.3 | 1.8 |
| MLPG 1st τάξης, 200 px ανά διεύθυνση. (40401 κόμβοι) | 0.56 | 3.4 |
| FEM, ~200 px ανά διεύθυνση  (41769 στοιχεία) | 6 | 13 |
|  | **Στάδιο επίλυσης**  **Διεργασία Μον. Κατάστ.**  **Σταθερή αγωγιμότητα**  **(1/25 της τελικής κατάστασης)**  **(s)** | **Solution time**  **Χρονομεταβαλλόμενη διεργασία,**  **Θερμομεταβαλλόμενη αγωγιμότητα**  **(1/25 της τελικής κατάστασης))**  **(s)** |
| MLPG 1st τάξης, 100 px ανά διεύθυνση. (10101 nodes) | 7  (72 επαναλήψεις) | 15  (55 επαναλήψεις) |
| MLPG τοπικά εκλεπτυσμένη σε διπλάσια διακριτοποίηση, 1st τάξης, αρχικά 100 px ανά διεύθυνση. (23727 nodes) | 20  (73 επαναλήψεις) | 48  (56 επαναλήψεις) |
| MLPG 1st τάξης, 200 px ανά διεύθυνση. (40401 nodes) | 33  (73 επαναλήψεις) | 75  (55 επαναλήψεις) |
| FEM, ~200 px ανά διεύθυνση.  (41769 στοιχεία) | 81  (80 επαναλήψεις) | 486  (58 επαναλήψεις) |

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. G.C. Bourantas, V.N. Burganos, An implicit meshless scheme for the solution of transient non-linear Poisson-type equations, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **37**, 1117-1126 (2013)

2. G.C. Bourantas, E.D. Skouras, V.C. Loukopoulos, G.C. Nikiforidis, Numerical Solution of Non-Isothermal Fluid Flows Using Local Radial Basis Functions (LRBF) Interpolation and a Velocity-Correction Method, *CMES-Comp. Model. Eng. Sci.*, **64**, 187-212 (2010)