

Οριακή Ανάλυση Ριπιδίου Τάσεων σε Μη-Συνεκτικό Έδαφος με Ίδιον Βάρος, με Χρήση Τασικών Συναρτήσεων

Limit Analysis of a Stress Fan in Frictional Soil with Self-weight, by means of Stress Functions

ΚΛΟΥΚΙΝΑΣ, Π.
ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Α-Ν.
ΜΥΛΩΝΑΚΗΣ, Γ.Ε.

Πολιτικός Μηχανικός, Μεταδιδ. Ερευνητής, Π. Bristol
Πολιτικός Μηχανικός, Υποψ. Διδάκτωρ, ΕΤΗ Zurich
Πολιτικός Μηχανικός, Καθηγητής, Π. Π.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Ο προσδιορισμός των οριακών τάσεων πλαστικοποίησης στο εσωτερικό εδαφικής σφήνας επί της οποίας ενεργούν δυνάμεις πεδίου, αποτελεί ένα από τα κλασικότερα και πλέον δυσεπίλυτα προβλήματα της Γεωτεχνικής Μηχανικής. Το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας και του κριτηρίου αστοχίας στο ριπίδιο των τάσεων, γνωστού και ως «ζώνη Boussinesq» επιλύεται παραδοσιακά με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών («γραμμών ολίσθησης»). Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται μια νέα προσέγγιση οριακής ανάλυσης τάσεων, η οποία απλοποιεί το πρόβλημα σε μία μόνο συνήθη διαφορική εξίσωση και επιτρέπει έτσι την επίλυση με σχετικά απλές αριθμητικές ή ημιαναλυτικές μεθόδους.

ABSTRACT: Determining limit stresses in a soil wedge which is in plastic equilibrium at all points under the action of body forces, is among the most difficult problems in geomechanics. The equations of equilibrium combined with the failure criterion within the stress fan, known as the «Boussinesq zone», is traditionally solved by the Method of Characteristics («Slip line»). In the work at hand, a new limit stress approach is presented which drastically simplifies the problem into a single ordinary differential equation, which is easier to tackle by numerical or semi-analytical methods.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

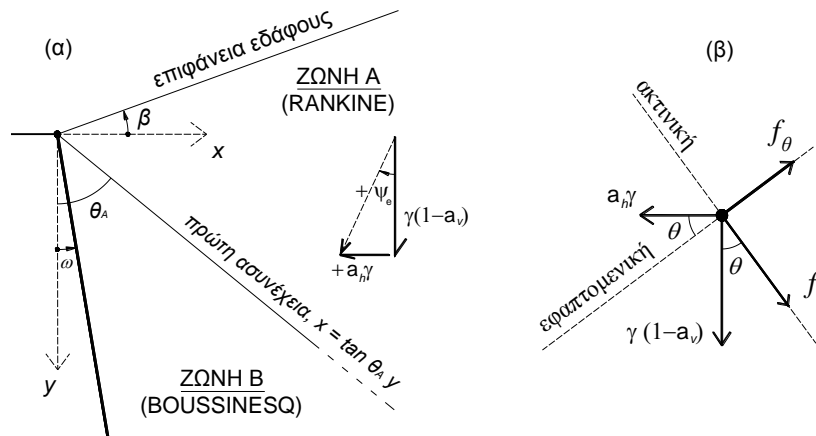
Παρότι η θεωρία της οριακής ανάλυσης εξελίσσεται συνεχώς κατά τους τελευταίους τρεις αιώνες, το πρόβλημα του συντελεστή φέρουσας ικανότητας θεμελίου λόγω ιδίου βάρους, δηλαδή του συντελεστή N_γ και το συγγενικό πρόβλημα του προσδιορισμού των ωθήσεων γαιών, δηλαδή των συντελεστών K_γ , παραμένει ακόμα άλυτο σε κλειστή μαθηματική μορφή. Οι κλασικές εργασίες των Coulomb (1776) και Rankine (1857) θεμελίωσαν δυο παράλληλες σχολές στην οριακή ανάλυση (Sokolovskii, 1965). Η εργασία του Coulomb, πέρα από την καταλυτική συμβολή με τον ορισμό της έννοιας της διατμητικής αντίστασης του εδάφους και της οριακής κατάστασης ισορροπίας, εισήγαγε μια γενική μέθοδο μέσω μηχανισμών αστοχίας και μαθηματικής βελτιστοποίησης, η οποία χρησιμοποιείται ευρύτατα μέχρι σήμερα.

Η δεύτερη σχολή που θεμελιώθηκε από τον Rankine (1857) επιχειρεί την αυστηρή μαθηματική ανάλυση της κατάστασης οριακής ισορροπίας, χωρίς τη χρήση αυθαίρετων μηχανισμών αστοχίας, υπό την παραδοχή ότι το έδαφος διαρρέει σε όλα τα σημεία. Ο Rankine χρησιμοποιεί τις σχέσεις του τανυστικού μετασχηματισμού των τάσεων και μαθηματικά στοιχεία διαφορικού λογισμού και επιλύει την περίπτωση ενός απειρομήκους πρανούς από μη συνεκτικό έδαφος. Παρόμοιες προσπάθειες δημοσιεύθηκαν από τους Levy (1873) και Saint-Venant (1870), οι οποίοι διαπίστωσαν τη δυσκολία επίλυσης του

προβλήματος όταν ληφθούν υπόψη ταυτόχρονα το ίδιο βάρος και η τραχύτητα του τοίχου. Ο Boussinesq (1882) είναι ο πρώτος που επιχειρεί να το επιλύσει μέσω δύο διακριτών ζωνών: μιας στην περιοχή του πρανούς στην οποία ισχύει η λύση Rankine, και μιας δεύτερης (ζώνη Boussinesq) μέχρι τον τοίχο εντός της οποίας οι τάσεις αναζητούνται αναλυτικά. Παρότι δεν κατάφερε να δώσει ικανοποιητική λύση, η εργασία του Boussinesq αποτελεί σταθμό στην οριακή ανάλυση, καθώς εισάγει την έννοια της ασυνέχειας των τάσεων. Στο πρώτο μισό του 20^{ου} αιώνα ασχολήθηκαν συστηματικά με το πρόβλημα της πλαστικής ισορροπίας κορυφαίοι επιστήμονες όπως οι Kötter (1903), von Karman (1927) και Caquot (1934), Sokolonskii (1939 - 1957). Οι εργασίες τους συνέβαλαν στην καλύτερη κατανόηση της φυσικής του προβλήματος, και συνεισέφεραν σειρά αξιόπιστων προσεγγιστικών λύσεων, ώστε να το καταστήσουν επιλύσιμο με αριθμητικές μεθόδους (Martin, 2005).

2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στη παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια νέα προσέγγιση στο πρόβλημα του Boussinesq, σε πιο γενικευμένη μορφή, με κεκλιμένο τοίχο (ω) και επίχωμα (β) και συνδυασμένη βαρυτική και σεισμική φόρτιση, υπό τη σεισμική γωνία ψ_e (Σχήμα 1α). Το εδαφικό υλικό είναι μη συνεκτικό και χαρακτηρίζεται από το ειδικό βάρος γ και τη γωνία τριβής ϕ . Η μέθοδος παρουσιάζεται διεξοδικά από τους Δημητρακόπουλο (2011) και Κλουκίνα (2012).



Σχήμα 1. (α) Το υπό εξέταση πρόβλημα (β) Δυνάμεις πεδίου σε πολικές συντεταγμένες
Figure 1. (a) The problem under consideration (b) Body forces in polar coordinates

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, η κλίση της χαρακτηριστικής των τάσεων θ_A που διαχωρίζει τις ζώνες Rankine και Boussinesq ως προς την κατακόρυφη, δίνεται από την Εξίσωση 1

$$\theta_A = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} + \frac{\Delta_1 + \beta - \psi_e}{2} \quad (1)$$

όπου $\Delta_1 = \sin^{-1}[\sin(\beta + \psi_e)/\sin\phi]$ και $\psi_e = \tan^{-1}[a_h/(1-a_v)]$. Θεωρώντας ολόκληρη την εδαφική μάζα σε κατάσταση διαρροής, οφείλουν να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξισώσεις ισορροπίας και το κριτήριο αστοχίας. Οι πρώτες, εκφρασμένες σε πολικές συντεταγμένες δίνονται από τις Εξισώσεις 2α,β

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = f_r \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = f_\theta \quad (2\alpha, \beta)$$

όπου $f_r = \gamma \cos(\theta + \psi_e)/\cos\psi_e$ και $f_\theta = -\gamma \sin\theta(1 + \tan\psi_e/\tan\theta)$ η ακτινική και η εφαπτομενική συνιστώσα των δυνάμεων πεδίου (Σχήμα 1β). Για υλικό χωρίς συνοχή, το γραμμικό κριτήριο αστοχίας Mohr - Coulomb σε πολικές συντεταγμένες γράφεται:

$$4\tau_{r\theta}^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = \sin^2 \phi (\sigma_r + \sigma_\theta)^2 \quad (3)$$

Η κλασική επίλυση του προβλήματος πραγματοποιείται με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών (Sokolonskii, 1965, Salençon 1977). Εάν οι εξισώσεις των τάσεων αστοχίας εισαχθούν στις εξισώσεις ισορροπίας, προκύπτει ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου, το οποίο είναι ολοκληρώσιμο πάνω σε χαρακτηριστικές οικογένειες τεμνόμενων καμπυλών όταν το πρόβλημα αφορά μη-ομογενή πεδία, δηλαδή περιοχές στις οποίες οι συναρτήσεις δεν έχουν συνεχείς παραγώγους (Abbot, 1967). Το τελικό σύστημα εξισώσεων απαιτεί αριθμητική επίλυση με χρήση καννάβου πεπερασμένων διαφορών. Ειδικότερες περιπτώσεις αποτελούν η περίπτωση των ημι-ομογενών πεδίων στα οποία η μία οικογένεια χαρακτηριστικών είναι ευθύγραμμη (Prandtl, 1923; Reissner, 1924), όπως είναι το πρόβλημα του υλικού χωρίς βάρος και η περίπτωση των ομογενών πεδίων στα οποία και οι δύο οικογένειες είναι ευθύγραμμες, όπως είναι η ζώνη Rankine.

3. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η πρώτη απλοποίηση αφορά την ανάλυση του προβλήματος με τη βοήθεια μίας μόνο διαφορικής εξίσωσης. Αυτό γίνεται εφικτό με την εισαγωγή μιας άγνωστης συνάρτησης δυναμικού $\Phi = \Phi(r, \theta)$ (Airy, 1862), η οποία ικανοποιεί ταυτοτικά τις εξισώσεις ισορροπίας (Εξ 2α, β) αν οι τάσεις γραφούν στην παρακάτω μορφή:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + V, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + V, \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \quad (4\alpha, \beta, \gamma)$$

Με V συμβολίζεται η συνάρτηση δυναμικού των δυνάμεων πεδίου, η οποία, ισούται με $V = rf_r$. Αν αντικατασταθούν οι Εξισώσεις 4α-γ στην Εξίσωση 3 λαμβάνεται η ακόλουθη μη-γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού και δευτέρας τάξης με μερικές παραγώγους

$$4 \left(\frac{1}{r} \Phi_\theta \right)_r^2 + \left(\frac{1}{r} \Phi_r + \frac{1}{r^2} \Phi_{\theta\theta} - \Phi_{rr} \right)^2 = \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{r} \Phi_r + \frac{1}{r^2} \Phi_{\theta\theta} + \Phi_{rr} + 2rf_r \right)^2 \quad (5)$$

όπου Φ_i, Φ_{ij} οι μερικές παράγωγοι της Φ ως προς τους αναγραφόμενους δείκτες. Η συγκεκριμένη εξίσωση, έχει δημοσιευτεί σε σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, χωρίς να δίνεται λύση, από τους Levy (1873) και Saint-Venant (1870). Διάφορες προσεγγίσεις για να απλοποιηθεί η παραπάνω έκφραση έχουν προταθεί από τους Nadai (1963), Malyshev (1969) και Azarou (1975). Η διατύπωση του προβλήματος σε πολικές συντεταγμένες επιτρέπει μια σημαντική απλοποίηση με την απαλοιφή της μιας εκ των ανεξάρτητων μεταβλητών, μέσω της ιδιότητας της αυτοομοιότητας (Γεωργιάδης, 2003). Καθώς το πρόβλημα της απειρομήκους σφήνας δεν περιέχει κανένα χαρακτηριστικό μήκος και το μοναδικό χαρακτηριστικό του εδάφους με διαστάσεις είναι το ειδικό βάρος, η μόνη φυσική δυνατότητα είναι η εξάρτηση της λύσης από ένα μονώνυμο του r με δύναμη που να ικανοποιεί διαστατικά τη λύση. Συνεπώς οι τάσεις μπορούν να γραφούν σε διαχωρισμένη μορφή, σύμφωνα με τη σχέση, $\sigma_{ij} = f(r)g(\theta)$ όπου $f(r)$ είναι ένα προσδιορισμένο μονώνυμο της ακτινικής μεταβλητής r . Στο υλικό χωρίς βάρος οι τάσεις δεν εξαρτώνται από το r , ενώ για υλικό με βάρος ισχύει $f(r) = \gamma r$.

Η συγκεκριμένη ιδιότητα έχει εφαρμοστεί στο παρελθόν για την απλοποίηση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας σε σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων που μπορεί να ολοκληρωθεί αριθμητικά χωρίς τη χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών (Martin, 2005). Αν τώρα εφαρμοστεί η αυτοομοιότητα στη συνάρτηση δυναμικού, προκύπτει $\Phi(r, \theta) = r^2 X(\theta)$ για υλικό χωρίς βάρος και $\Phi(r, \theta) = r^3 X(\theta)$ για το υλικό με βάρος. Βάση αυτής της αντικατάστασης, οι εξισώσεις των τάσεων και η διαφορική εξίσωση (Εξ. 5) μεταπίπτουν στις Εξισώσεις 6, 7 για υλικό χωρίς βάρος και στις Εξισώσεις 8,9 για υλικό με βάρος, αντίστοιχα:

$$\sigma_r = 2X(\theta) + X''(\theta), \quad \sigma_\theta = 2X(\theta), \quad \tau_{r\theta} = -X'(\theta) \quad (6\alpha, \beta, \gamma)$$

$$4X'(\theta)^2 + X''(\theta)^2 = \sin^2 \varphi [4X(\theta) + X''(\theta)]^2 \quad (7)$$

$$\sigma_r = \gamma r [3X(\theta) + X''(\theta) + \bar{f}_r], \quad \sigma_\theta = \gamma r [6X(\theta) + \bar{f}_r], \quad \tau_{r\theta} = -\gamma r [2X'(\theta)] \quad (8\alpha, \beta, \gamma)$$

$$16X'(\theta)^2 + [-3X(\theta) + X''(\theta)]^2 = \sin^2 \varphi [9X(\theta) + X''(\theta) + 2\bar{f}_r]^2 \quad (9)$$

όπου $\bar{f}_r = f_r / \gamma$. Η Εξίσωση 7 επιλύεται εύκολα μέσω εκθετικής αντικατάστασης, επαληθεύοντας την κλασική λύση του εκθετικού ριπιδίου (Reissner, 1924). Αντίθετα, στην περίπτωση της Εξίσωσης 9 αυτό δεν είναι δυνατό λόγω του όρου $2\bar{f}_r$ που εκφράζει τις δυνάμεις. Οι δύο διαφορικές εξισώσεις διαφέρουν επίσης ως προς τους σταθερούς συντελεστές, το οποίο επιβεβαιώνει ότι δεν ισχύει η ευρέως χρησιμοποιούμενη αρχή της υπέρθεσης των λύσεων για το ίδιο βάρος και την επιφόρτιση (Salencon, 1977).

3.1 Συνοριακές συνθήκες του προβλήματος

Με γνωστές τις τάσεις στη ζώνη Rankine προσδιορίζεται η συνάρτηση δυναμικού που ισχύει στο εσωτερικό της με τη μορφή της Εξίσωσης 10, η οποία αντιστοιχεί σε παθητικές συνθήκες. Οι αντίστοιχες τάσεις για τις ενεργητικές συνθήκες προκύπτουν με απλή αλλαγή του προσήμου της γωνίας φ (Mylonakis et al. 2007). Αναφορικά με τη σεισμική γωνία ψ_e σημειώνεται ότι η κρίσιμη ενεργητική τιμή των τάσεων προκύπτει για θετική γωνία (φορά προς τον τοίχο) ενώ η κρίσιμη παθητική τιμή προκύπτει για αρνητική γωνία (φορά προς το πρανές).

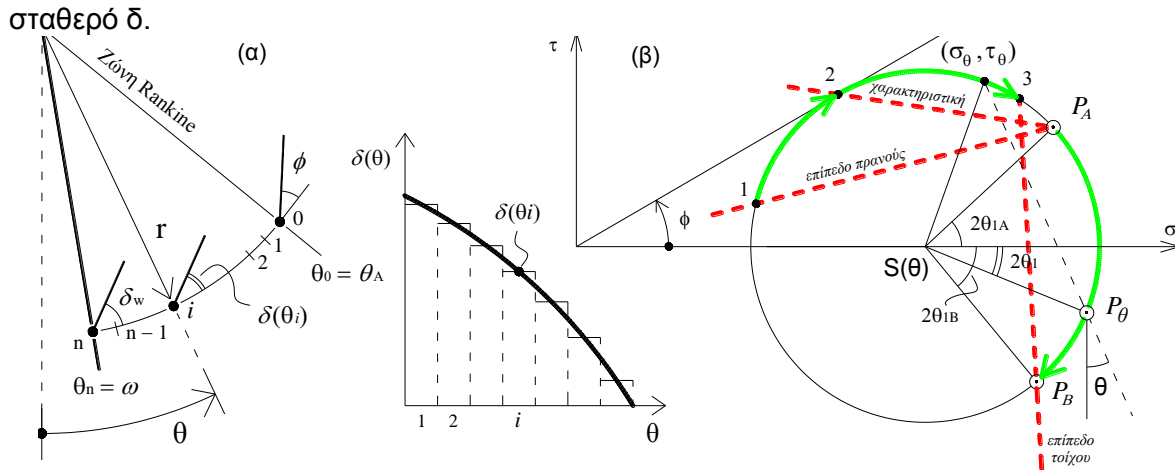
$$X(\theta)_{Rankine} = \frac{1}{6} \left(\cos(\theta - \beta) \frac{\cos(\beta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \frac{1 + \sin \varphi \cos[2(\theta - \theta_{1A})]}{1 - \sin \varphi \cos(\Delta_1 - \beta - \psi_e)} - \frac{\cos(\theta + \psi_e)}{\cos \psi_e} \right) \quad (10)$$

Επομένως πάνω στο σύνορο των ζωνών Rankine και Boussinesq (πρώτη ασυνέχεια στο Σχήμα 1) μπορούν να υπολογιστούν η τιμή της συνάρτησης $X(\theta_A)$ και οι παράγωγοί της. Επίσης, εξ ορισμού πάνω στη χαρακτηριστική ισχύει $\tau_{r\theta} / \sigma_\theta = \tan \varphi$. Αυτό αντιστοιχεί σε συνοριακή συνθήκη τύπου Cauchy, που σημαίνει ότι η λύση θα μπορούσε να προκύψει ως ανάπτυγμα Taylor, αν επρόκειτο για πρόβλημα αρχικών τιμών. Όπως απέδειξε ο Caquot (1934) το πρόβλημα χαρακτηρίζεται από απροσδιοριστία και υπάρχουν άπειρες λύσεις που ικανοποιούν τη συγκεκριμένη συνοριακή συνθήκη. Συνεπώς, για την ορθή επίλυση του προβλήματος, οφείλει να ικανοποιείται και η συνοριακή συνθήκη που ισχύει στο άλλο άκρο της ζώνης Boussinesq, επί του τοίχου. Εκεί δεν είναι γνωστή ούτε η τιμή της συνάρτησης $X(\theta)$ ούτε κάποια από τις παραγώγους της, παρά μόνο η κλίση της ώθησης που ισούται με $\tan \delta_w$, όπως υπαγορεύει η απαίτηση αστοχίας της διεπιφάνειας. Επομένως, η συνοριακή συνθήκη γράφεται στη μορφή της Εξίσωσης 12 που αντιπροσωπεύει μια συνθήκη Robin, ως γραμμικός συνδυασμός των συνθηκών Dirichlet και Neumann πάνω σε μια συνοριακή επιφάνεια. Η Εξίσωση 12 μπορεί να γραφεί στη γενική μορφή της γραμμικής διαφορικής Εξίσωσης 13, που ισχύει για κάθε ακτίνα θ . Εάν η κλίση $\delta(\theta)$ ήταν σταθερή, όπως είναι στην περίπτωση του ημι-ομογενούς πεδίου Henky-Prandtl (Prandtl, 1923) τότε η Εξ.13 λύνεται με απλή εκθετική αντικατάσταση, καταλήγοντας έτσι στο γνωστό εκθετικό ριπίδιο της βιβλιογραφίας.

$$\left. \frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_\theta} \right|_{\theta=\omega} = \frac{-2X'(\omega)}{6X(\omega) + \bar{f}_r(\omega)} = \tan \delta_w \quad (12)$$

$$X'(\theta) + 3 \tan \delta(\theta) X(\theta) = -\frac{1}{2} \tan \delta(\theta) \bar{f}_r(\theta) \quad (13)$$

Εάν ήταν γνωστή η μεταβολή του λόγου $\tau/\sigma = \tan \delta(\theta)$ κατά μήκος του ριπιδίου, τότε η Εξίσωση 13 θα μπορούσε να δώσει απευθείας τις τιμές της συνάρτησης $X(\theta)$, είτε αριθμητικά – είτε ημιαναλυτικά με χρήση της αναλυτικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης για τμηματικά



Σχήμα 2. Μεταβολή της κλίσης $\delta(\theta)$ (α) και των κύριων επιπέδων (β) στη ζώνη Boussinesq
 Figure 2. Inclination $\delta(\theta)$ (a) and principal planes (β) variation within Boussinesq zone

Με τη σειρά της, η μεταβολή της συνάρτησης $\delta(\theta)$, όπως φαίνεται από τη γεωμετρική αναπαράσταση του κύκλου Mohr (Σχήμα 2β) είναι συνάρτηση της άγνωστης κλίσης θ_1 του μέγιστου κύριου επιπέδου σε κάθε διεύθυνση θ , και δίνεται από την Εξίσωση 14. Η κλίση αυτή είναι γνωστή, ίση με $\theta_{1A} = (\Delta_1 + \beta + \varphi_e)/2$ μέσα σε ολόκληρη τη Ζώνη Rankine (καθώς το θ περιστρέφεται από το σημείο 1 έως το σημείο 2 του Σχήματος). Επίσης είναι γνωστή η τιμή της ακριβώς πάνω στον τοίχο (σημείο 3 του Σχήματος), ίση με $\theta_{1B} = (\Delta_2 + \delta_w - 2\omega)/2$, όπου $\Delta_2 = \sin^{-1}(\sin\delta_w/\sin\phi)$. Για τις ενδιάμεσες τιμές του θ , μεταξύ των σημείων 2 και 3, ο πόλος του κύκλου μετατοπίζεται κατά άγνωστο τρόπο, από τη θέση P_A στη θέση P_B . Σημειώνεται εδώ ότι μεταξύ των σημείων 2 και 3 και το κέντρο του κύκλου S μετατοπίζεται βάσει μιας επίσης άγνωστης συνάρτησης του θ .

$$\tan \delta(\theta) = \frac{\sin \varphi \sin[2(\theta - \theta_1)]}{1 + \sin \varphi \cos[2(\theta - \theta_1)]} \quad (14)$$

3.2 Γραμμικοποίηση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

Επειδή η αριθμητική επίλυση της Δ.Ε. στη μορφή της Εξ. 9 παρουσιάζει εγγενείς δυσκολίες, χρησιμοποιείται μια γραμμικοποιημένη μορφή, η οποία βασίζεται στην αναδιατύπωση του κριτηρίου Mohr – Coulomb (Azaron, 1975). Αν η Εξ. (3) επιλυθεί ως τριώνυμο θεωρώντας ως άγνωστη τη συνάρτηση σ_r , καταλήγει σε μια σχέση αναλογίας μεταξύ των τάσεων σ_r και σ_θ στην αστοχία, που δίνεται από την Εξ. (15) στην οποία εισάγεται μια βοηθητική συνάρτηση $f(\theta) = \tan\delta(\theta)/\tan\varphi$.

$$\sigma_r / \sigma_\theta = Q(\theta) = 1 + 2 \tan^2 \varphi \mp 2 \tan \varphi \sqrt{1 - f(\theta)^2} / \cos \varphi \quad (15)$$

Εκφράζοντας τις τάσεις με χρήση του παραπάνω λόγου, καταλήγουμε στη Εξίσωση 16, που έχει τη μορφή δευτεροβάθμιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Όπως και στην περίπτωση της Εξ. 13, μπορεί να εξαχθεί αναλυτική λύση για την Εξίσωση 16 θεωρώντας σταθερούς συντελεστές, για να χρησιμοποιηθεί ως τμήμα ημιαναλυτικής μεθόδου με τμηματικά σταθερό δ (Κλουκίνας, 2012).

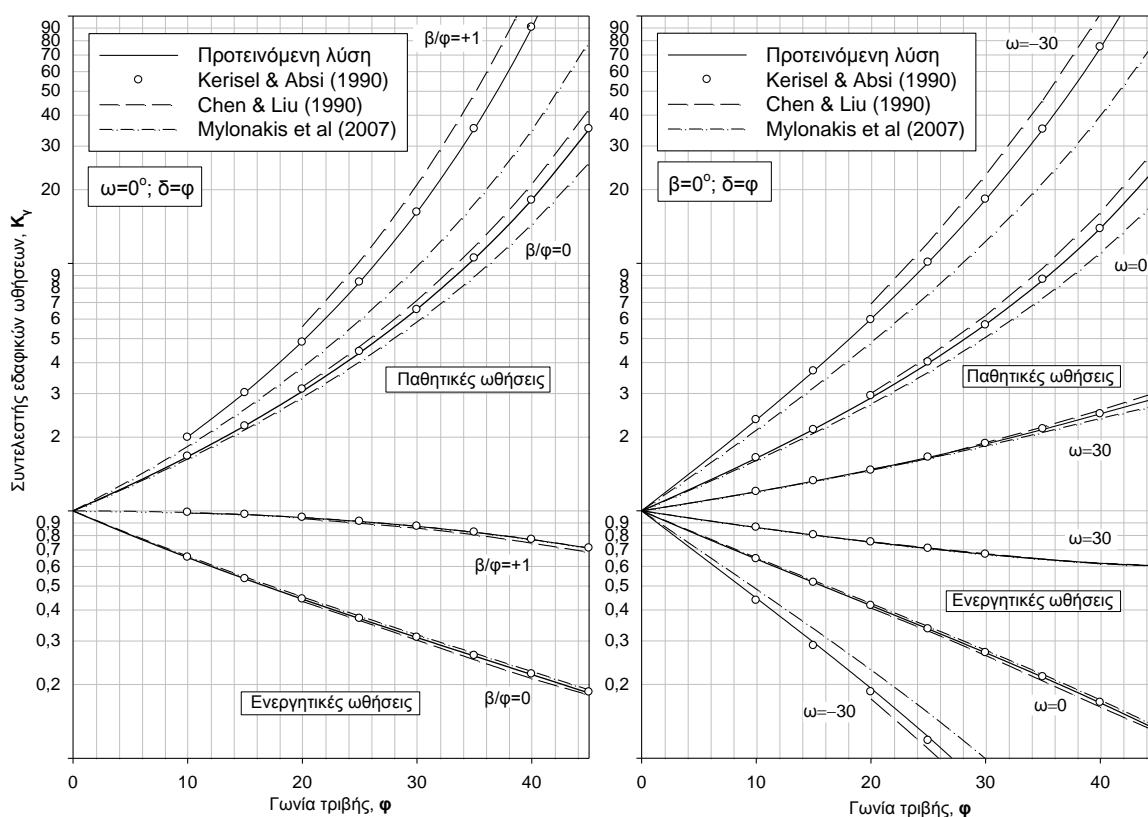
$$X''(\theta) - 3[2Q(\theta) - 1]X(\theta) - f_r(\theta)[Q(\theta) - 1] = 0 \quad (16)$$

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ

Η συνήθης διαφορική εξίσωση του προβλήματος, μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Το πλεονέκτημα της παρούσας λύσης σε σχέση με 7ο Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωτεχνικής Μηχανικής

τη μέθοδο των χαρακτηριστικών είναι ότι διακριτοποιείται μόνο ένα τόξο (κατά μήκος της μεταβλητής θ) και δεν απαιτείται διδιάστατος κάναβος. Το μη-γραμμικό σύστημα που προκύπτει, επιλύεται με την κλασική αριθμητική μέθοδο Newton, η σύγκλιση της οποίας εξαρτάται από την αρχική προσέγγιση (Δημητρακόπουλος, 2011). Μια δεύτερη τεχνική επίλυσης χρησιμοποιεί μια επαναληπτική μέθοδο σύγκλισης που βασίζεται στην επιλογή μια τυχαίας συνάρτησης κλίσης $f(\theta)$ με τη βοήθεια της οποίας υπολογίζονται οι συντελεστές της Εξ. (16) και από αυτήν οι τιμές της συνάρτησης $X(\theta)$. Από τις τιμές της συνάρτησης $X(\theta)$ υπολογίζεται η νέα προσέγγιση της $f(\theta)$ μέχρι την τελική σύγκλιση. Η συγκεκριμένη τεχνική αποδεικνύεται εξαιρετικά αξιόπιστη και σταθερή (Κλουκίνας, 2012).

Στο Σχήμα 3, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα για βαρυντικές ενεργητικές και παθητικές ωθήσεις, με τη μορφή των γνωστών νομογραφημάτων Caquot & Kerisel. Τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου συγκρίνονται με τα πλέον αξιόπιστα αποτελέσματα των Kerisel & Absi (1990), με τα οποία υπάρχει απόλυτη ταύτιση και με τα αποτελέσματα της κινηματικής οριακής ανάλυσης των Chen & Liu (1990) (άνω όριο) και της οριακής ανάλυσης τάσεων (κάτω όριο) των Mylonakis et al. (2007).



Σχήμα 3. Συγκρίσεις βαρυντικών ενεργητικών και παθητικών ωθήσεων για διάφορες κλίσεις τοίχου και επιχώματος β και απόλυτα τραχύ τοίχο ($\delta = \varphi$)

Figure 3. Comparison of results for active and passive pressures, for various wall, ω and backfill inclinations, β and rough wall ($\delta = \varphi$)

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται σύγκριση αποτελεσμάτων για σεισμικές παθητικές ωθήσεις σε κατακόρυφο λείο, τραχύ τοίχο ($\delta = 0$ και $\delta = \varphi$) και οριζόντιο επίχωμα με $\varphi = 30^\circ$ και 40° . Τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου συγκρίνονται με τα αποτελέσματα των λύσεων των Cheng (2003) και Kumar & Chitikela (2002) της μεθόδου των χαρακτηριστικών και επίσης των λύσεων άνω ορίου Kumar (2001) και Soubra (2000). Η συμφωνία με τις δύο πρώτες λύσεις είναι εξαιρετική, ενώ οι επόμενες δύο φυσιολογικά παράγουν μεγαλύτερες τιμές, ειδικά για την περίπτωση $\delta = \varphi$. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα της προτεινόμενης μεθόδου που έχουν προκύψει με χρήση μόλις 100 σημείων διακριτοποίησης, είναι καλύτερα άνω όρια από τη λύση του Cheng (2003) που έχει προκύψει από πυκνό

Συνεδρία IV Συμπεριφορά Εδαφών: Προσομοιώματα_IV.4

κάνναβο πλευράς 10^{-5} m (500 φορές πυκνότερη διακριτοποίηση σε τόξο που αντιστοιχεί σε ακτίνα αναφοράς 1m).

Πίνακας 1. Συγκρίσεις αποτελεσμάτων για το σεισμικό συντελεστή παθητικών ωθήσεων γαιών από διάφορες μεθόδους, για $\omega=\beta=0^\circ$ (τροποποιημένο από Cheng, 2003)

Table 1. Comparison of results for the seismic passive earth pressure coefficient, by various methods, for $\omega=\beta=0^\circ$ (modified from Cheng, 2003)

φ (°)	a_h	Προτεινόμενη λύση	Γραμμές Ολίσθησης		Οριακή Ισορροπία			
			Cheng (2003)	Kumar & Chitikela (2002)	Kumar (2001)	Soubra (2000)		
$\delta = 0^\circ$	30°	0	3,000	3,000	3,000	3,000		
		0,1	2,819	2,821	2,817	2,820		
		0,2	2,618	2,621	2,610	2,630		
		0,3	2,392	2,394	2,374	2,420		
		0,4	2,127	2,130	2,096	-		
		0,5	1,786	1,792	1,738	-		
	40°	0	4,599	4,599	4,590	4,600		
		0,1	4,379	4,381	4,377	4,380		
		0,2	4,144	4,146	4,138	4,150		
		0,3	3,894	3,897	3,880	3,910		
		0,4	3,624	3,627	3,598	-		
		0,5	3,327	3,333	3,286	-		
	$\delta = \varphi^\circ$	30°	0	6,549	6,556	6,563	6,677	6,860
			0,1	6,076	6,084	6,083	6,187	6,350
			0,2	5,561	5,566	5,562	5,655	5,790
0,3			4,990	4,996	4,986	5,065	5,170	
0,4			4,335	4,343	4,327	4,390	-	
0,5			3,511	3,526	3,501	3,545	-	
40°		0	18,131	18,150	18,186	18,863	19,620	
		0,1	17,088	17,106	17,131	17,736	18,460	
		0,2	15,992	16,011	16,002	16,607	17,230	
		0,3	14,833	14,853	14,852	15,385	15,940	
		0,4	13,597	13,619	13,606	14,082	-	
		0,5	12,261	12,287	12,260	12,677	-	

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρουσιάστηκε νέα λύση οριακής ανάλυσης τάσεων για το πρόβλημα βαρυτικών και σεισμικών ωθήσεων γαιών σε τοίχους βαρύτητας, ως εναλλακτική της μεθόδου των χαρακτηριστικών ή γραμμών ολίσθησης. Με χρήση της συνάρτησης Airy και της εγγενούς ιδιότητας της αυτοομοιότητας, το πρόβλημα περιγράφεται από μια μόνο συνήθη διαφορική εξίσωση. Η αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης ως προς τη μεταβλητή θ , απαιτεί διακριτοποίηση ενός μόνο κυκλικού τόξου, σε αντίθεση με τον κάνναβο των πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιούν οι λύσεις της μεθόδου των χαρακτηριστικών. Η γνώση της συνάρτησης δυναμικού παρέχει φυσική εποπτεία του προβλήματος και επιτρέπει τον υπολογισμό των τάσεων σε κάθε σημείο του εδαφικού μέσου – όχι μόνο κατά μήκος των γραμμών ολίσθησης. Επιπλέον συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της φυσικής του προβλήματος και ανοίγει το δρόμο στην εφαρμογή, πέραν της αυστηρής αριθμητικής επίλυσης, προχωρημένων αναλυτικών ή απλοποιημένων ημιαναλυτικών μεθόδων.

6. ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα έρευνα έχει συγχρηματοδοτηθεί από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο - ΕΚΤ) και από εθνικούς πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του Εθνικού Στρατηγικού Πλαισίου Αναφοράς (ΕΣΠΑ) - Ερευνητικό Χρηματοδοτούμενο Έργο: ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ III Επένδυση στην κοινωνία της γνώσης μέσω του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου.

7ο Πανελλήνιο Συνέδριο Γεωτεχνικής Μηχανικής

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Γεωργιάδης, Χ.Γ. (2003). "Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών", Εκδ. Συμμετρία, Αθήνα.
- Δημητρακόπουλος, Α.Ν. (2011). "Προσδιορισμός Βαρυτικών και Σεισμικών Ωθήσεων Γαιών με Οριακή Ανάλυση Τάσεων", Διατριβή Μ.Δ.Ε, Τμ. Πολιτικών Μηχανικών, Π.Π.
- Κλουκίνας, Π. (2012). "Συμβολή στη Στατική και Δυναμική Ανάλυση Τοίχων Αντιστήριξης Μέσω Θεωρητικών και Πειραματικών Μεθόδων", Δ.Δ., Τμ. Πολιτικών Μηχανικών, Π.Π.
- Abbott, B.M. (1967). "An Introduction to the Method of Characteristics", Elsevier, NY
- Airy, G.B. (1862). "On the Strains in the Interior of Beams", British Association for the Advancement of Science Report.
- Azarov, N.S. (1975). "Analytical Method for Determination of Backfill Pressure on Retaining Walls", Balashikhinsk Pedagogic Institute (in Russian)-English Translation from Osnovaniya, Fundamenty I Mekhanika Gruntov.
- Boussinesq, J. (1876). "Essai Théorique sur l'Equilibre d'Elasticité des Massifs Pulveruents", *Mem. Savante étrangere*, Acad. Belgique, 40, pp. 1-80.
- Caquot, A. (1934). "Equilibre des Massifs a Frottement Interne, Stabilité des Terres Pulvérulents et Cohérentes", Gauthier-Villars: Paris.
- Cheng, Y.M. (2003). "Seismic Lateral Earth Pressure Coefficients for c-φ Soils by Slip Line Method", *Computers and Geotechnics*, 30, pp. 661-670.
- Coulomb, C.A. (1776). "Essai sur une Application des Regles de Maximis et Minimis a Quelques Problemes de Stratique Relatifs a l' Architecture". *Memoires de Mathematique et de Physique, Presentes a l' Academie Royale des Sciences*; Paris, Vol. 7, pp. 343-382.
- Karman, von T. (1927). "Uber Elastische Grenzzustände", *Proceedings of the Second International Congress of Applied Mechanics*, p.23, Zurich.
- Kerisel, J. and Absi, E. (1990). "Active and Passive Earth Pressure Tables" A.A. Balkema
- Koetter, F. (1903). "Die Bestimmung des Drucks an gekrümmten Gleitflächen eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften", Berlin, pp 229–233.
- Kumar, J. (2001). "Seismic passive earth pressure coefficients for sands", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 38 (4), pp. 876–81.
- Kumar, J. and Chitikela, S. (2002). "Seismic Earth Passive Pressure Coefficients Using the Method of Characteristics", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 39 (2), pp 463-471.
- Lévy, M. (1873). "Sur une Théorie Rationnelle de l'Equilibre des Terres Fraîchement Remuées et ses Applications au Calcul de la Stabilité des Murs de Soutènement", *Journal de Mathématiques*, 2nd series, 18, 241.
- Malyshev, M.U. (1969). "An Approximate Solution to Ultimate Equilibrium Problems in Loose Media, Based on Linearization of the Initial Equation", *Proc. 7th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Mexico City, pp.406-408.
- Martin, C.M (2005). "Exact Bearing Capacity Calculations Using the Method of Characteristics", *Proceedings of the 11th IACMAG*, Turin, Vol. 4, 441-450.
- Mylonakis, G., Kloukinas, P. and Papantonopoulos, C. (2007). "An Alternative to the Mononobe–Okabe Equations for Seismic Earth Pressures", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Volume 27, Issue 10, Pages 957-969.
- Nadai, A. (1963). "Theory of Flow and Fracture of Solids", McGraw-Hill, New York.
- Prandtl, L. (1923). "Anwendungsbeispiele zu Einem Henckyschen Satz über das Plastische Gleichgewicht." *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik* 3: 401-406.
- Rankine, W.J.M. (1857). "On the Stability of Loose Earth", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 147, pp. 9 – 27.
- Reissner, H. (1924). "Zum Erddruck Problem", *Proceedings of the First International Congress Applied Mechanics*, Delft, pp.295-311.
- Saint-Venant, B.DE (1870). "Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Maurice Lévy...par MM. Combes, Serret, Bonnet, Phillips, de Saint-Venant rapporteur", *Journal de Mathématiques*, 2nd series, 15, 237.
- Salençon, J. (1977). "Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics", Wiley, NY.
- Sokolovskii, V.V. (1965). "Statics of Granular Media". NewYork : Pergamon. 270 pp.

Συνεδρία IV Συμπεριφορά Εδαφών: Προσομοιώματα_IV.4

Soubra, A.H. (2000). "Static and Seismic Passive Earth Pressure", *Canadian Geotechnical Journal* , 37, pp. 463-478.